Topology Vol. 12, pp. 317–325. Pergamon Press, 1973. Printed in Great Britain

PROPRIETES COHOMOLOGIQUES ET PROPRIETES TOPOLOGIQUES DES FEUILLETAGES A CONNEXION TRANSVERSE PROJETABLE

PIERRE MOLINO

(*Received* 27 *April* 1973)

§0. INTRODUCTION

SOIENT V une variété différentiable, $\mathscr{F}$ un feuilletage différentiable sur V, Q le fibré quotient du fibré tangent $T(V)$ par le sous-fibré tangent aux feuilles. Dans [9] on a introduit la notion de *connexion transverse projetable* (C T P) sur la variété $(V, \mathscr{F})$. Une C T P sera une connexion sur Q localement projetable suivant les feuilles de $\mathscr{F}$. On a montré dans [10] que l'existence d'une C T P est assurée par la nullité d'une obstruction $a(\mathscr{F})$ qui est une classe de cohomologie généralisée sur V. Cette obstruction étant analogue à celle définie par Atiyah dans [1], on l'a appelée *classe d'Atiyah du feuilletage*. La construction de $a(\mathscr{F})$ est brièvement rappelée au §1.

L'existence d'une C T P ($a(\mathscr{F}) = 0$) a des conséquences en ce qui concerne les classes caractéristiques du feuilletage. Dans [11] on a montré que, pour un feuilletage à C T P, les classes de Pontrjagin réelles de Q sont nulles en dimension supérieure à la codimension de $\mathscr{F}$, ce qui est un rafinement d'un résultat connu de Bott (voir [2]). Pasternak, dans [13], a démontré la même propriété pour les feuilletages à "bundle-like metric", qui sont des feuilletages à C T P particuliers. Cette propriété entraîne l'apparition d'invariants secondaires (classes "exotiques") plus fins que ceux de Bott–Haefliger (voir [3] et [4]). On introduit ici, pour étudier ces invariants secondaires, des classes caractéristiques "fines" (ou *basiques*) des feuilletages à C T P, à valeurs dans la cohomologie des formes basiques de la variété feuilletée (au sens de Reinhart [14]). On montre que la nullité des classes de Pontrjagin impaires basiques de Q entraîne la nullité de certaines classes exotiques (Théorème 2 et suivants).

Il nous a paru d'autre part intéressant d'étudier rapidement les propriétés topologiques des feuilletages à C T P. Dans [14], Reinhart a démontré quelques propriétés topologiques remarquables des feuilletages à bundle-like metric. Il est intéressant de voir que la condition $a(\mathscr{F}) = 0$, de nature purement cohomologique, entraîne pour le feuilletage des propriétés topologiques non triviales qui généralisent d'assez près celles des feuilletages à bundle-like metric.

En ce qui concerne les propriétés cohomologiques des feuilletages à C T P, l'étude faite ici rentre dans une large mesure dans le cadre des importants travaux de Kamber–Tondeur sur les invariants différentiels des faisceaux d'algèbres de Lie de champs de vecteurs (voir [5], [6], [7]).

§ 1. CARACTÈRISATION COHOMOLOGIQUE DES FEUILLETAGES À C T P; EXEMPLES

(a) *On travaille dans la catégorie* des variétés différentiables réelles C^∞ paracompactes. Les notations seront celles de [12]. Soient $n = \dim V$, $q = \dim Q$ la codimension du feuilletage $\mathscr{F}$. On notera $E_T(V, p_T, Gl(q, \mathbb{R}))$ le fibré des repères de Q, ou *fibré des repères transverses* au feuilletage. La projection locale de Q le long des feuilles définit sur E_T un feuilletage invariant à droite $\mathscr{F}_T$ dont les feuilles sont des revêtements des feuilles de $\mathscr{F}$. Soit $L(E_T)$ le fibré en algèbres de Lie de E_T. C'est un fibré vectoriel feuilleté (au sens de [10]) au dessus de $(V, \mathscr{F})$.

E étant le fibré vectoriel tangent aux feuilles, une décomposition en somme directe: $T(V) = E \oplus Q$ définit une décomposition duale: $T^* = Q^* \oplus E^*$ qui permet de décomposer les formes différentielles sur V en formes "pures" de type (p', p). Suivant Reinhart (voir aussi [15]) on décompose la différentielle $d\alpha_{p',p}$ d'une forme pure de type (p', p) en ses composantes pures et on note $d_F\alpha_{p',p}$ la composante de type $(p', p+1)$. L'opérateur d_F définit des espaces de cohomologie notés de façon évidente $H_F{}^{p',p}(V; \mathbb{R})$.

Plus généralement, si M est un fibré vectoriel feuilleté sur $(V, \mathscr{F})$, on définira de facon analogue les espaces de cohomologie $H_F{}^{p',p}(V; M)$.

Ceci étant, soit ω une connexion infinitésimale sur E_T pour laquelle le feuilletage $\mathscr{F}_T$ est horizontal (connexion "transverse" au sens de [9] ou "basique" au sens de [3]). Sa courbure Ω sera une 2-forme sur V à valeurs dans le fibré en algèbres de Lie $L(E_T)$. Il est facile de voir que Ω est somme d'une forme de type $(1, 1)$ et d'une forme de type $(2, 0)$:

$$\Omega = \Omega_{1,1} + \Omega_{2,0}. \tag{1}$$

De plus, $d_F\,\Omega_{1,1} = 0$ et $\Omega_{1,1}$ définit donc une classe de cohomologie $[\Omega_{1,1}] \in H_F{}^{1,1}(V; L(E_T))$. On vérifie que cette classe ne dépend pas de la connexion basique choisie. On la note $a(\mathscr{F})$ et on l'appelle classe d'Atiyah du feuilletage. On a alors:

THEORÈME (voir [10]). *$a(\mathscr{F})$ est l'obstruction a l'existence sur la variété feuilletée $(V, \mathscr{F})$ d'une connexion transverse projetable.*

On note encore que, si $a(\mathscr{F}) = 0$, ω_0 étant une C T P on obtient toutes les autres en ajoutant à ω_0 une 1-forme arbitraire $\eta \in H_F{}^{1,0}(V; L(E_T))$. Donc $H_F{}^{1,0}(V; L(E_T))$ paramètre l'ensemble des C T P.

(b) *Donnons deux exemples* de feuilletages à CTP.

Exemple 1. On peut donner des exemples de *feuilletages à CTP qui n'admettent pas de bundle-like metric*:

ρ étant un nombre réel différent de 0 et ± 1, on considère l'homomorphisme $\mathbb{Z} \to Gl(q, \mathbb{R})$ qui à l'entier relatif p associe l'homothétie de rapport ρ^p. Cet homomorphisme définit une représentation de $\pi_1(S^1)$ dans le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}^q$. A l'aide de cette représentation on construit un fibré de base S^1, fibre-type $\mathbb{R}^q$ et groupe structural l'image de l'homomorphisme précédent. Ce fibré est naturellement muni d'un feuilletage transverse à la fibration.

Ce feuilletage est à C T P car le groupe structural laisse invariante la connexion plate standard de la fibre-type $\mathbb{R}^q$. Par contre, il n'admet pas de bundle-like metric car le groupe structural ne laisse visiblement pas de métrique invariante sur $\mathbb{R}^q$.

Cet exemple peut se généraliser aisément : il suffit de faire opérer le groupe fondamental d'une variété B comme groupe de difféomorphismes d'une variété F respectant sur F une connexion linéaire mais ne laissant pas de métrique invariante.

Exemple 2 [Cet exemple m'a été signalé par Koszul].

Soient G un groupe de Lie, g son algèbre de Lie. Considérons une décomposition en somme directe $g = h \oplus m$, où h est une sous-algèbre de Lie de g et $[h, m] \subset m$. La sous-algèbre de Lie h définit par translation à gauche un feuilletage $\mathscr{F}$. Soit E_T le fibré des repères transverses à ce feuilletage. Les champs de vecteurs invariants à gauche engendrés par une base de m permettent de définir une section globale s de E_T invariante par l'action de G. Sur cette section, la projection de g sur h suivant m détermine une 1-forme ω à valeurs dans h invariante à gauche. La représentation adjointe définit un homomorphisme $h \to gl(m)$. Par suite la 1-forme ω détermine une connexion infinitésimale sur E_T invariante par G à gauche. ω est une C T P pour la variété feuilletée $(G, \mathscr{F})$.

L'intérêt de ce cas vient en particulier de ce que les invariants secondaires définis au paragraphe suivant (classes exotiques des feuilletages à C T P) peuvent, dans cet exemple, être représentés par des formes différentielles invariantes à gauche sur G. Bien entendu, ces invariants seront nuls si h est la sous-algèbre de Lie définie par un sous-groupe de Lie fermé H de G, car dans ce cas le feuilletage est simple. De même ces classes exotiques seront nulles si la représentation adjointe de h dans m laisse un produit scalaire invariant.

§2. CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES FEUILLETAGES À C T P

On conserve les notations des paragraphes précédents.

2.1. Nullité de certaines classes caractéristiques

ω étant une C T P, Ω sa courbure, le fait que Ω est pure de type (2, 0) entraîne que tout polynôme en cette courbure de degré supérieur à la moitié de la codimension q du feuilletage est identiquement nul. On en déduit un rafinement du résultat de Bott relatif aux classes caractéristiques des feuilletages:

THEORÈME 1 (voir [11]). *Les classes de Pontrjagin réelles de Q sont nulles en dimension supérieure a la codimension du feuilletage.*

Pasternak a prouvé ce résultat dans [13] pour le cas d'un feuilletage à bundle-like metric.

On peut donc considérer que, dans le cas général, les classes $\mathrm{Pont}^k(Q; \mathbb{R})$ de degré compris entre q et $2q$ $(q < k \leq 2q)$ du fibré transverse à un feuilletage sont des obstructions à l'existence d'un feuilletage homotope au précédent admettant une C T P.

Remarque. Le résultat énoncé et l'étude qui va suivre se généralisent immédiatement au cas des fibrés principaux feuilletés sur $(V, \mathscr{F})$ admettant une connexion projetable au sens de [11] et [12].

2.2. Classes caractéristiques "fines" des feuilletages à C T P

Considérons, avec les notations du §1, les espaces de cohomologie $H_F^{k,0}(V; \mathbb{R})$ où k prend les valeurs 0, 1, ..., q. Les éléments d'un tel espace sont des k-formes réelles sur V projetables (localement) suivant le feuilletage, ou formes "basiques" (voir [14] et [15]). La différentielle usuelle induit une différentielle $d: H_F^{k,0}(V; \mathbb{R}) \to H_F^{k+1,0}(V; \mathbb{R})$ définissant le complexe des formes basiques, dont la cohomologie sera notée:

$$H^*_{\text{bas}}(V; \mathbb{R}) = \bigoplus_{k=0}^{q} H^k_{\text{bas}}(V; \mathbb{R}). \tag{2}$$

Ceci étant, soit φ un polynôme symétrique de degré p sur $gl(q, \mathbb{R})$ invariant par la représentation adjointe. En substituant aux arguments de φ la courbure Ω d'une C T P ω, on obtient une $2p$-forme fermée qui définira par projection sur V une classe de cohomologie basique indépendante de la C T P considérée. On a construit ainsi des classes de Pontrjagin "fines" de Q, notées $\text{Pont}_{\text{bas}}(Q; \mathbb{R})$, à valeurs dans la cohomologie des formes basiques. En particulier, on notera $p^k_{\text{bas}}(Q)$, pour $k = 1, \ldots, \left[\frac{q}{2}\right]$, les génerateurs usuels de ces classes caractéristiques basiques, $p^k_{\text{bas}}(Q) \in H^{2k}_{\text{bas}}(V; \mathbb{R})$.

Il est important de noter que, en général:

$$p^k_{\text{bas}}(Q) \neq 0 \quad \text{pour } k \text{ impair} \tag{3}$$

contrairement à ce qui se passe pour les classes de Pontrjagin ordinaires de Q, classes que nous noterons $p^k(Q) \in H^{2k}(V; \mathbb{R})$. Toutefois, ces classes basiques impaires sont nulles si le feuilletage admet une bundle-like metric. En effet, une telle métrique définit une C T P particulière pour laquelle les formes différentielles représentant les classes $p^k_{\text{bas}}(Q)$ sont identiquement nulles pour k impair.

On pourra donc considérer les classes $p^k_{\text{bas}}(Q)$, pour *k impair*, comme des *obstructions à l'existence, sur un feuilletage à C T P, d'une bundle-like metric.*

Bien entendu, *toutes* les classes caractéristiques fines sont des obstructions à l'existence d'une C T P sans courbure, et par conséquent des *obstructions à l'existence d'une trivialisation projetable* de Q.

L'injection naturelle des formes basiques dans les formes différentielles ordinaires induit, pour $k = 0, 1, \ldots, q$, une application:

$$j_k: H^k_{\text{bas}}(V; \mathbb{R}) \to H^k(V; \mathbb{R}) \text{ dont on notera } N^k_{\text{bas}} \text{ le noyau.} \tag{4}$$

Avec ces notations, on a immédiatement:

$$p_k(Q) = j^{2k}(p^k_{\text{bas}}(Q)) \text{ et en particulier } p^{2b+1}_{\text{bas}}(Q) \in N^{2(2b+1)}_{\text{bas}}. \tag{5}$$

2.3. Classes exotiques [voir [3] et [7])

Pour $k = 1, \ldots, q$, notons φ^k le polynôme symétrique élémentaire de degré k sur $gl(q, \mathbb{R})$ invariant par la représentation adjointe. Si Ω est la courbure d'une C T P ω, la forme différentielle $\varphi^k(\Omega)$ représente les classes caractéristiques correspondantes de Q pour $k \leq q/2$:

$$p^k_{\text{bas}}(Q) = [\varphi^k(\Omega)]_{bas} \in H^{2k}_{\text{bas}}(V; \mathbb{R}) \tag{6}$$

et

$$p^k(Q) = [\varphi^k(\Omega)] \in H^{2k}(V; \mathbb{R}).$$

Si d'autre part $\tilde{\omega}$ est une connexion riemannienne sur Q, on définit par la méthode de "comparaison" de ω et $\tilde{\omega}$ (voir Bott [3]) des formes différentielles $\tilde{\varphi}^k_{\omega,\tilde{\omega}}$ de degré $(2k-1)$ vérifiant, pour k impair:

$$\mathrm{d}\tilde{\varphi}^k_{\omega,\tilde{\omega}} = \varphi^k(\Omega). \tag{7}$$

Ici, k pourra prendre les valeurs $1, 3, \ldots, 2r+1$, où $(2r+1)$ est le plus grand entier impair $\leq q$. On notera que pour $k > q/2$ le second membre de (7) est nul.

Ceci étant, on considère (voir [3], [7], [8]) l'algèbre différentielle:

$$WO'_{q/2} = \mathbb{R}[c_1, \ldots, c_{[q/2]}]/(\deg > q/2) \otimes \wedge\, (h_1, h_3, \ldots, h_{2r+1}) \tag{8}$$

avec la différentielle $\mathrm{d}c_k = 0$, $\mathrm{d}h_k = c_k$ si $k \leq \left[\frac{q}{2}\right]$, $\mathrm{d}h_k = 0$ si $k > q/2$.

En posant:

$$\Delta'(c_k) = \varphi^k(\Omega) \text{ et } \Delta'(h_k) = \tilde{\varphi}^k_{\omega,\tilde{\omega}} \tag{9}$$

on définit un homomorphisme Δ' de $WO'_{q/2}$ dans l'algèbre des formes différentielles sur V, compatible avec la différentielle, d'où un homomorphisme:

$$\Delta'^*\colon H^*(WO_{q/2}') \to H^*(V; \mathbb{R}). \tag{10}$$

Les classes de cohomologie appartenant à l'image de Δ'^* seront dites *classes exotiques du feuilletage à C T P*. Ces classes sont nulles si le feuilletage admet une bundle-like metric.

On remarquera que ces classes exotiques sont "plus fines" que celles de Bott–Haefliger (voir [3] et [4]) en le sens suivant:

$$\text{si } WO_q = R[c_1, \ldots, c_q]/(\deg > q) \otimes \wedge\, (h_1, \ldots, h_{2r+1}),$$

on a une application naturelle T: $WO_q \to WO_{q/2}'$ et un diagramme commutatif (qui m'a été signalé par Lehmann):

$$\begin{tikzcd} H^*(WO_q) \arrow[d, "T^*"'] \arrow[dr, "\Delta^*"] & \\ H^*(WO'_{q/2}) \arrow[r, "\Delta'^*"] & H^*(V; \mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

où la flèche Δ^* définit les classes exotiques de Bott–Haefliger du feuilletage. Ceci résulte immédiatement du fait que les C T P sont des connexions basiques (au sens de [3]) particulières.

Par suite: (i) l'existence de C T P entraîne la nullité de certaines des classes exotiques de Bott–Haefliger, à savoir celles obtenues à partir du noyau de l'homomorphisme T^*,

(ii) la nullité des classes exotiques du feuilletage à C T P *entraîne* la nullité de toutes les classes exotiques de Bott–Haefliger.

2.4. Classes caractéristiques fines et classes exotiques des feuilletages à C T P

(a) *Considerons dans* $WO'_{q/2}$ un cocycle:

$$\alpha = (c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_s}) h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_t} \text{ avec } 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_s \leq q/2$$

$$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leq q. \tag{12}$$

La condition de cocycle s'écrit:

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_s + j_1 > q/2 \tag{13}$$

et d'autre part, pour que $\alpha \neq 0$, on devra avoir:

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_s \leq q/2. \tag{14}$$

THEORÈME 2. *Si les classes de Pontrjagin basiques impaires p_{bas}^{2l+1} (Q) sont nulles, alors la classe exotique $\Delta'^*([\alpha])$ definie à partir du cocycle* (12) *est nulle sous les hypothèses suivantes: l'un des indices $i_1, \ldots, i_s$ est impair et $i_1 + i_2 + \cdots + i_s + j_1 > q/2 + 1$.*

Demonstration. Sous les hypothèses faites, pour k impair compris entre 1 et q il existe une forme $\psi^k \in H_F^{2k-1,0}(V; \mathbb{R})$ telle que d $\psi^k = \varphi^k(\Omega)$, et par suite:

$$\tilde{\varphi}^k_{\omega, \bar{\omega}} = \psi^k + u^k \quad \text{avec } du^k = 0.$$

Bien entendu $\psi^k = 0$ pour $k > q/2$. Dans ces conditions:

$$\Delta'(\alpha) = \varphi^{i_1}(\Omega) \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_s}(\Omega) \wedge (\psi^{j_1} + u^{j_1}) \wedge \cdots \wedge (\psi^{j_t} + u^{j_t}).$$

Au second membre de cette expression toutes les formes sont basiques sauf les u^j. L'hypothèse $i_1 + \cdots + i_s + j_1 > q/2 + 1$ entraîne alors:

$$\Delta'(\alpha) = \varphi^{i_1}(\Omega) \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_s}(\Omega) \wedge u^{j_1} \wedge \cdots \wedge u^{j_t}$$

et dans ce produit extérieur tous les facteurs sont des formes fermées. L'un des indices étant impair, l'une au moins est cohomologue à 0, d'où le résultat.

C.Q.F.D.

On remarque que les hypothèses du Théorème 2 sont en particulier plus faibles que l'existence d'une bundle-like metric.

On peut faire une étude analogue en supposant *toutes* les classes caractéristiques basiques nulles. Il vient alors:

THEORÈME 3. *Si les classes de Pontrjagin basiques $p_{\text{bas}}^k(Q)$ sont nulles, la classe exotique $\Delta'^*([\alpha])$ définie à partir du cocycle* (12) *est nulle si $i_1 + \cdots + i_s + j_1 > q/2 + 1$.*

En fait, dans ce théorème, on pourrait seulement supposer $p_{\text{bas}}^k = 0$ pour k impair et $p^k = 0$ pour k pair.

(b) *Etudions maintenant* le cas où le fibré Q transverse au feuilletage à C T P étudié *admet une trivialisation.* On pourra alors (voir [4]) définir de nouvelles classes exotiques en utilisant l'algèbre différentielle:

$$W'_{q/2} = R[c_1, \ldots, c_{[q/2]}]/(\deg > q/2) \otimes \wedge (h_1, h_2, \ldots, h_q) \tag{15}$$

avec $dc_k = 0$, $dh_k = c_k$ si $k \leq [q/2]$, $dh_k = 0$ si $k > q/2$.

La trivialisation utilisée permet, par "comparaison" avec la C T P ω, de définir des formes différentielles $\tilde{\varphi}_w^k$ de degré $(2k - 1)$ vérifiant:

$$d\tilde{\varphi}_w^k = \varphi^k(\Omega) \quad \text{pour } k = 1, \ldots, q \tag{16}$$

d'où l'on déduit, comme au paragraphe 2.3 un homomorphisme:

$$\delta'^*: H^*(W'_{q/2}) \to H^*(V; \mathbb{R}) \tag{17}$$

définissant les *classes exotiques du feuilletage à C T P et à fibré transverse trivial.*

Un cocycle de $W'_{q/2}$ s'écrira encore sous la forme (12), les indices j pouvant maintenant être pairs. On obtient alors un résultat analogue aux précédents:

THEORÈME 4. *Si les classes de Pontrjagin basiques $p_{bas}^k(Q)$ sont toutes nulles, la classe exotique $\delta'^*([\alpha])$ obtenue à partir du cocycle* (12) *est nulle si on a*:

$$i_1 + \cdots + i_s + j_1 > q/2 + 1.$$

On notera que les résultats ci-dessus peuvent s'interpréter en termes de suites spectrales en utilisant les constructions de [7].

§3. PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DES FEUILLETAGES À C T P

On reprend les notations du §1. $(V, \mathscr{F})$ étant munie de la C T P ω, on note

$$E_T\,(V, p_T, Gl(q, \mathbb{R}))$$

le fibré des repères transverses, $\mathscr{F}_T$ le feuilletage relevé dans E_T au dessus de $\mathscr{F}$. Ce feuilletage relevé est horizontal pour ω.

3.1. Une propriété de l'holonomie du feuilletage

Soient x un point de V, F_x la feuille passant par x, l_x un lacet en x de F_x, W_x une sous-variété transverse au feuilletage passant par x. ω induit sur W_x une connexion linéaire. Mais de plus, ω étant projetable, le glissement le long de l_x suivant les feuilles laisse invariant le germe en x de la connexion induite sur W_x. On en déduit:

PROPOSITION 1 (voir [12]). *Si ω est une C T P sur $(V, \mathscr{F})$, en tout point x de V l'holonomie de la feuille F_x laisse invariante la connexion linéaire induite par ω sur un germe de sous-variété transverse en x.*

Notons que cette propriété doit être vérifiée pour *toutes* les C T P ω, ce qui donne des conditions très fortes sur l'holonomie de $\mathscr{F}$.

3.2. Etude de l'holonomie du feuilletage $\mathscr{F}_T$

On notera d'abord que $\mathscr{F}_T$ n'est autre que le *feuilletage d'holonomie infinitésimale d'ordre* 1 (au sens de la théorie des feuilletages): au dessus d'une feuille F_o de $\mathscr{F}$, le feuilletage $\mathscr{F}_T$ définit une connexion sans courbure. L' holonomie de cette connexion (au sens de la théorie des connexions) définit en tout point $x_o \in F_o$ un homomorphisme:

$$h_{x_o}{}^1 : \pi_1(F_o, x_o) \to Gl(Q_{x_o})$$

qui est précisément l'holonomie infinitésimale d'ordre 1 en x_o de la feuille F_o.

Notons Q_T le fibré vectoriel transverse au feuilletage $\mathscr{F}_T$.

LEMME. *Le fibré vectoriel Q_T admet une trivialisation projetable suivant le feuilletage $\mathscr{F}_T$.*

En effet, localement ω est la préimage d'une connexion linéaire $\bar{\omega}$ sur une variété quotient locale W de V. Le fibré des repères linéaires de W, $e(W)$, est une variété quotient locale de E_T. Sur $e(W)$, la connexion linéaire $\bar{\omega}$ détermine de façon naturelle un parallélisme absolu, défini par les champs géodésiques de $\bar{\omega}$ et les champs fondamentaux du fibré $e(W)$. La préimage de ce parallélisme absolu par la projection de E_T sur $e(W)$ sera une trivialisation projetable de Q_T. La définition est locale mais, par unicité, elle est valable globalement, d'où le résultat.

On en déduit:

PROPOSITION 2. *Le feuilletage $\mathscr{F}_T$ est sans holonomie.*

Demonstration. Tout feuilletage dont le fibré vectoriel transverse admet une trivialisation projetable est sans holonomie; en effet l'holonomie en un point doit commuter avec les groupes locaux à un paramètre définis sur une sous variété transverse par les champs de vecteurs associés à la trivialisation. D'où le résultat, compte tenu du lemme précédent.

3.3. Cas d'une C T P complète

Etant donnés une variété feuilletée $(V_1, \mathscr{F}_1)$ et un champ de vecteurs X sur V_1 on suppose X projetable suivant $\mathscr{F}_1$. X définit alors une section projetable X_1 du fibré Q_1 transverse *à* $\mathscr{F}_1$. On dira que X est un *relèvement* de X_1.

Une section projetable X_1 de Q_1 partout différente de 0 sera dite *complète* si elle admet un relèvement X qui soit un champ de vecteurs complet de V_1.

Ceci étant, on pose:

Definition. Une C T P ω sur la variété feuilletée $(V, \mathscr{F})$ sera dite *complète* si les sections de Q_T définies par la trivialisation projetable construite au lemme précédent sont complètes.

On a alors:

PROPOSITION 3. *Si ω est une C T P complète sur $(V, \mathscr{F})$, alors toutes les feuilles du feuilletage $\mathscr{F}_T$ sont difféomorphes entre elles.*

Démonstration. Sous les hypothèses faites, la trivialisation projetable de Q_T permet de définir sur la variété E_T un groupe transitif de difféomorphismes respectant le feuilletage $\mathscr{F}_T$, d'où le résultat.

COROLLAIRE (Théorème de stabilité). *Si $(V, \mathscr{F})$ admet une C T P ω complète et possède une feuille F_o compacte à groupe d'holonomie infinitésimale d'ordre* 1 *fini, alors toutes les feuilles de $\mathscr{F}$ sont compactes à groupe d'holonomie infinitésimale d'ordre* 1 *fini.*

Remarque. Les démonstrations précédentes s'appliquent en particulier pour les feuilletages *à* bundle-like metric et permettent de retrouver très simplement les résultats de Reinhart (voir [14]).

BIBLIOGRAPHIE

1. M. F. Atiyah: Complex analytic connections on fibre bundles, *Trans. Am. math. Soc.* **85** (1957), 181-207.
2. R. Bott: On a topological obstruction to integrability, *Proc. Symp. Pure Math.* XVI (1970), 127-131.
3. R. Bott: *Lectures on Characteristic Classes and Foliations.* Lecture Notes in Mathematics No. 279. Springer, Berlin (1972).
4. A. Haeflìger: Sur les Classes Caractéristiques des Feuilletages. Séminaire Bourbaki, exposé 412 (1972).
5. Kamber-Tondeur: Invariant differential operators and the cohomology of Lie algebra sheaves, *Mem. Am. math. Soc.* **113** (1971).
6. Kamber-Tondeur: Characteristic invariants of foliated bundles (à paraître).
7. Kamber-Tondeur: Derived characteristic classes of foliated bundles (à paraître).
8. D. Lehmann: J-homotopie dans les espaces de connexions et classes exotiques de Chern–Simons, *C. r. Acad. Sci., Paris* (1972).
9. P. Molino: Connexions et G-structures sur les variétés feuilletés feuilletées, *Bull. Sci. Math., Paris.* **92** (1968), 59–63.
10. P. Molino: Classe d'Atiyah d'un feuilletage et connexions transverses projetables, *C. r. Acad. Sci., Paris* **272** (1971), 779–781.
11. P. Molino: Classes caractéristiques et obstructions d'Atiyah pour les fibrés principaux feuilletés, *C. r. Acad. Sci., Paris* **272** (1971), 1376–1378.
12. P. Molino: Feuilletages et classes caractéristiques, *Symposia Mathematica* X (1971), 199–209.
13. J. Pasternak: Foliations and compact Lie group actions, *Commemt. Math. Helvet.* **46** (1971), 467–477.
14. B. Reinhart: Foliated manifolds with bundle-like metrics, *Ann. Math.* **69** (1959), 119–132.
15. I. Vaismann: Variétés riemanniennes feuilletées, *Czech. Math. J.* **21** (1971), 46–75.

Institut de Mathematiques
Université des Sciences et Techniques du Languedoc
Montpellier, France